

## Séries chronologiques et questions de stationnarité

### Un exemple introductif

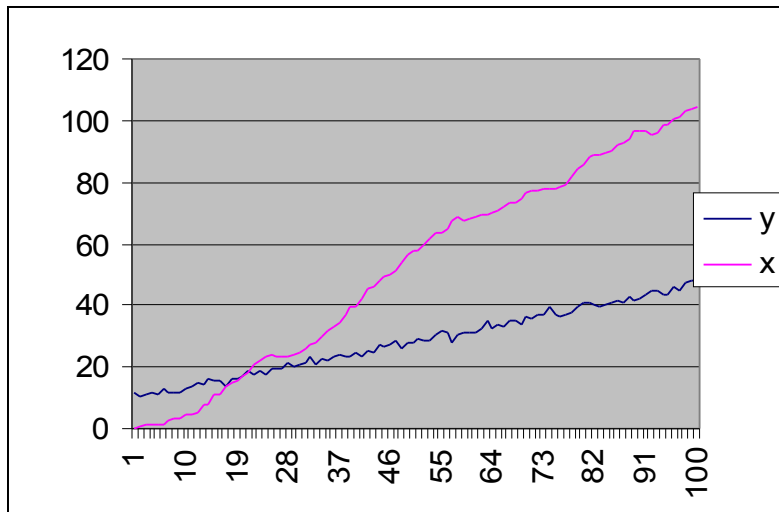
Soient deux séries aléatoires  $y_t$  et  $x_t$  définies comme suit :

$$y_t = 10 + 0,37.t + \varepsilon_t$$

$$x_t = 1 + x_{t-1} + \varepsilon'_t \quad \text{avec } x_0 = 0$$

Pour  $t$  allant de 1 à 100 et où  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon'_t$  sont deux séries d'aléas normaux, centrés, homoscedastiques d'écart-type égaux à 1, indépendants entre les périodes et indépendantes entre elles.

Pour une simulation, ou réalisation particulière, des deux séries d'aléas indépendantes, on obtient les chroniques  $y$  et  $x$  figurées ci-dessous :



tandis que la régression de  $y$  sur  $x$  par les MCO donne les résultats suivants :

#### Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	11394	11394	908.14	<.0001
Error	98	227.49867	2.32142		
Corrected Total	99	11621			

Root MSE	1.52362	R-Square	0.9804
Dependent Mean	28.71548	Adj R-Sq	0.9802
Coeff Var	5.30591		

#### Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr >  t
Intercept	1	11.23797	0.29232	38.44	<.0001
x	1	0.32590	0.00465	70.06	<.0001

Selon les critères traditionnels : très fort  $R^2$ , excellent test F et surtout excellents tests de Student, on serait conduit à juger cette régression très bonne et le modèle sous-jacent envisagé très probant, alors même que les séries ont été créées de manière totalement autonome et indépendante, sans la moindre liaison *a priori*.

Ce phénomène fâcheux, dit de *régression illusoire*, ou *fallacieuse (spurious regression)* est dû ici à la présence d'une tendance de forme linéaire commune, et plus généralement à l'emploi de séries dites *non-stationnaires*.

**Remarque** : on comprend néanmoins mieux la liaison apparente en exprimant  $x_t$  en fonction des aléas, par élimination répétée de  $x_{t-1}$ ,  $x_{t-2}$ , etc. jusqu'à  $x_0$  ici supposé nul :

$$x_t = x_0 + t + (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \dots + \varepsilon'_{t-1} + \varepsilon'_t) = t + (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \dots + \varepsilon'_{t-1} + \varepsilon'_t)$$

## Suites stationnaires

### Définitions

On appelle *suite aléatoire*, *processus aléatoire*, ou encore *processus stochastique*, une suite temporelle de variables aléatoires :  $z_t$ .

De même qu'on considérait la *réalisation* d'une va, ayant perdu son caractère aléatoire et utilisée notamment via les échantillons pour l'estimation concrète, on parle de réalisation ou de *trajectoire* pour désigner une suite d'observations ou *chronique* associées à un processus stochastique.

Une suite aléatoires  $z_t$  est *stationnaire* (au sens faible, ou stationnaire tout court), si toutes les va ont même espérance  $E(z_t) = E(z_{t'}) = E(z)$ , même variance  $\sigma^2(z_t) = \sigma^2(z_{t'}) = \sigma^2(z)$ , et si les autocorrélations ne dépendent pas du temps, mais simplement de l'écart  $k$  entre les périodes considérées :  $\text{corr}(z_t, z_{t+k}) = \text{corr}(z_{t'}, z_{t'+k}) = \rho_k$ . En un mot, cela signifie que les caractéristiques probabilistes sont stables et inchangées au cours du temps.

Les quantités précédentes : espérance, variance, autocorrélations, lorsqu'elles existent, sont estimées par les quantités empiriques correspondantes (moyenne, variance, etc.) calculées sur une série d'observations de longueur suffisante de la chronique observée.

**Remarque** : plus largement une série aléatoire est *asymptotiquement stationnaire*, si les propriétés indiquées sont vérifiées asymptotiquement. Lorsque ce sera le cas, on supposera la stabilisation approximativement réalisée et on négligera désormais cette nuance.

## Modèles autorégressifs, marches aléatoires, processus explosifs

### Modèles de base

Les modèles *autorégressifs* (c'est à dire expliquant une variable par son passé, et éventuellement par d'autres variables) les plus simples sont ceux de la forme :

$$(1) \quad x_t = \alpha \cdot x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{où } |\alpha| < 1)$$

où l'on suppose que  $\varepsilon_t$  est une suite de va normales centrées de même variance  $\sigma^2(\varepsilon)$  et indépendantes (on dit encore que les aléas et sont normaux et *identiquement et indépendamment distribués* : *iid*, ou que leur suite aléatoire est un *bruit blanc*).

De la relation (1) découlent par éliminations successives :

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha^2 \cdot x_{t-2} + (\alpha \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &\dots \\ (1.1) \quad x_t &= \alpha^t \cdot x_0 + (\alpha^{t-1} \cdot \varepsilon_1 + \alpha^{t-2} \cdot \varepsilon_2 + \dots + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \end{aligned}$$

Un tel processus autorégressif avec un seul retard exprimé est appelé processus *AR(1)* dans la terminologie des séries chronologiques.

Dans la décomposition de  $x_t$ , on qualifie fréquemment le terme retardé :  $\alpha \cdot x_{t-1}$ , de *part mémorisée* et le terme  $\varepsilon_t$  d'*innovation*.

Il est important de comprendre que  $x_t$  dépend de tout le passé :  $x_0, x_1, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}$ , mais cette mémoire de l'ensemble du passé est totalement transmise via l'observation immédiatement précédente  $x_{t-1}$ .

On montre que la série  $x_t$  est alors stationnaire (ou plutôt asymptotiquement stationnaire, et stationnaire moyennant quelques contraintes sur les conditions initiales).

En autorisant le coefficient autorégressif  $\alpha$  à prendre la valeur 1, la relation devient :

$$(2) \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

et le processus est une *marche aléatoire (random walk)*. On peut en effet considérer qu'on passe de  $x_{t-1}$  à  $x_t$  en faisant un pas de longueur  $\varepsilon_t$ .

Les relations dérivées précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-2} + (\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &\dots \\ (2.1) \quad x_t &= x_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \end{aligned}$$

Si enfin le coefficient  $\alpha$  est supérieur à 1 en valeur absolue, le processus est dit *explosif*.

**Propriétés** : en fait, et malgré une forme fonctionnelle d'apparence comparable, les trois processus précédents ont des propriétés bien différentes. Il est aisé de voir que dans les deux derniers cas, les séries ne sauraient être stationnaires, par exemple parce que leur variance croît sans limite.

On peut résumer les propriétés liées à la stationnarité dans un tableau (en supposant pour simplifier l'initialisation  $x_0 = 0$ ) :

*	Série stationnaire	Marche aléatoire	Processus explosif
Valeur de $\alpha$	$ \alpha  < 1$	$\alpha = 1$	$ \alpha  > 1$
Espérance	0	0	0
Variance asymptotique <sup>1</sup>	$\sigma^2(\varepsilon)/(1-\alpha^2)$	divergente	divergente
Autocorrélation asymptotique d'ordre 1 <sup>2</sup>	$\alpha$	1	1
Autocorrélation asymptotique d'ordre k <sup>3</sup>	$\alpha^k$ décroissant vers 0 lorsque k croît	1	1

<sup>1</sup>  $\lim \sigma^2(x_t)$  pour t croissant

<sup>2</sup>  $\rho = \rho_1 = \lim \text{corr}(x_t, x_{t+1})$  pour t croissant

<sup>3</sup>  $\rho_k = \lim \text{corr}(x_t, x_{t+k})$  pour t croissant

La convergence vers 1 des corrélations asymptotiques pour une marche aléatoire, par exemple, est aisée à concevoir : en écrivant la relation (2.1) pour  $x_t$  et  $x_{t+k}$ , on voit que la partie commune, qui est simplement  $x_t$ , devient prépondérante devant les k termes de la différence ( $\varepsilon_{t+1} + \dots + \varepsilon_{t+k}$ ) lorsque t croît.

### Corrélation partielle, autocorrélations partielles

Dans le cadre du modèle linéaire simple, on a défini la corrélation entre deux variables, mesurée par le coefficient de corrélation linéaire  $r = \text{corr}(y, x)$ . Dans le cadre du modèle linéaire multiple, on a défini la corrélation multiple, mesurée par le coefficient  $R^2$ , qui quantifie la liaison entre la variable à expliquer y et l'ensemble des explicatives : x, z, v, w, etc. On définit la *corrélation partielle* entre y et x (par exemple) comme la corrélation entre y et x « corrigées » de l'influence des autres variables z, v, w, etc. Plus précisément, le *coefficient de corrélation partielle* entre y et x peut être défini comme le coefficient de corrélation entre le résidu de la régression de y sur z, v, w, etc. et celui de x sur ces mêmes variables.

Dans le cas de séries chronologiques stationnaires, l'*autocorrélation partielle d'ordre k* de la série  $x$  est définie comme le coefficient de corrélation partielle entre  $x_t$  et  $x_{t+k}$  corrigées des séries décalées intermédiaires :  $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+k-1}$ .

Une observation n'y dépendant du passé que par l'intermédiaire de l'observation précédente on conçoit, et on peut montrer, que les autocorrélations partielles d'ordre  $k$  plus grand que 1 sont toutes nulles dans les modèles envisagés précédemment :

*	Série stationnaire	Marche aléatoire	Processus explosif
Valeur de $\alpha$	$ \alpha  < 1$	$\alpha = 1$	$ \alpha  > 1$
Autocorrélation partielle d'ordre $k$ ( $k > 1$ )	0	0	0

**Remarque** : comme en ce qui concerne l'espérance, la variance, les corrélations, etc., les grandeurs précédentes associées à une suite aléatoire ont un sens probabiliste et ce sont ces valeurs théoriques qui sont indiquées ci-dessus ; les grandeurs empiriques correspondantes, calculées par des méthodes appropriées sur une chronique particulière observée, en sont des estimations. Par exemple les autocorrélations partielles calculées sur une série d'observations de taille suffisante seront faibles - si du moins le modèle postulé est correct...

### Exemples

Examinons des réalisations des quatre exemples :

$$x_t = 0,2 \cdot x_{t-1} + \varepsilon_t$$

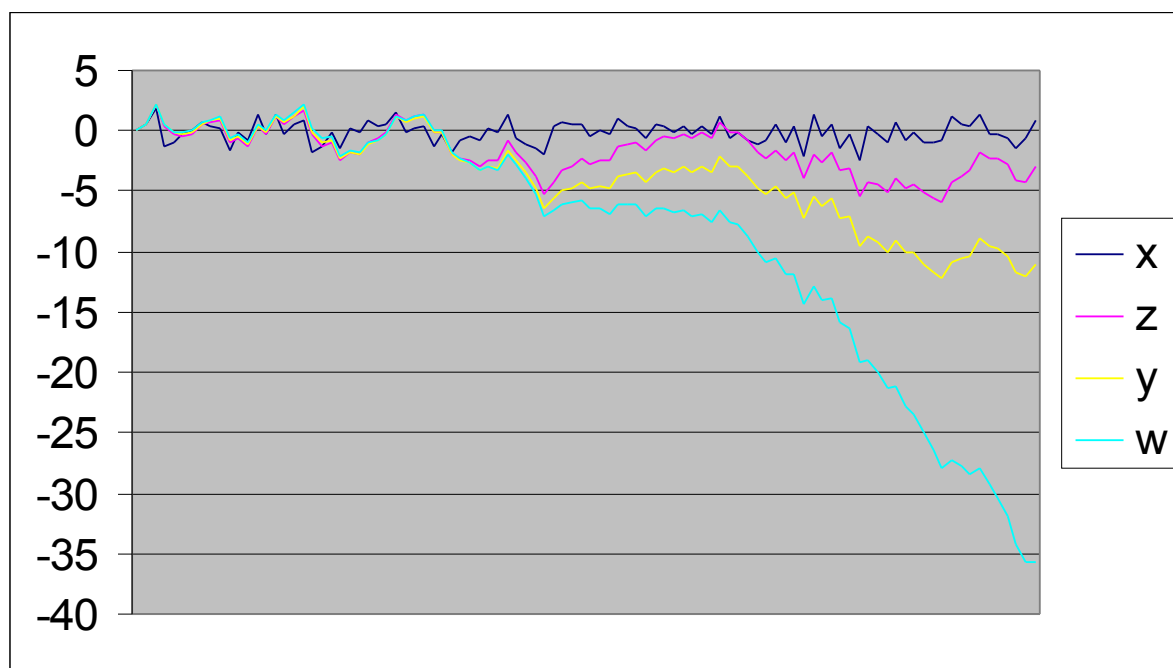
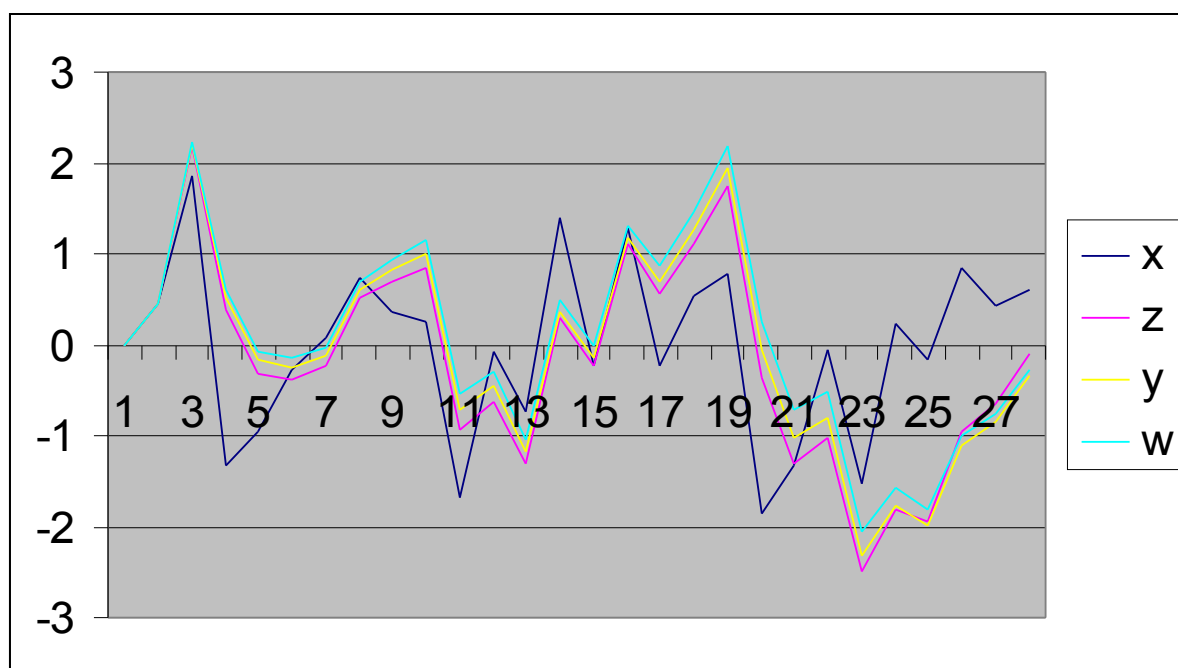
$$z_t = 0,95 \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$w_t = 1,003 \cdot w_{t-1} + \varepsilon_t$$

utilisant pour l'occasion la même série  $\varepsilon_t$  d'aléas simulés.

Le premier graphique représente les quatre séries sur un horizon de trente périodes, et le second jusqu'à  $t = 100$ .



Il convient de noter que c'est le hasard de la simulation particulière qui envoie l'essentiel du second graphique du côté négatif (plus surprenant encore : malgré la direction négative marquée, les courbes  $y_t$  et  $w_t$ , telles  $x_t$  et  $z_t$ , repasseront une infinité de fois par la valeur 0...)

On voit par ailleurs sur ces exemples que si les comportements peuvent paraître assez comparables sur un horizon court (ici 30 périodes), marche aléatoire et surtout processus explosif se distinguent clairement d'un processus stationnaire lorsque la durée considérée s'allonge et ceci alors que le paramètre  $\alpha$  n'est guère éloigné entre les modèles  $z$ ,  $y$  et  $w$ .

Examinons de même autocorrélations et autocorrélations partielles (ainsi que leur représentation graphique ou *corrélogramme*) :

Série x

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. .	. .	1	0.031	0.031	0.0969	0.756
. .  **	. .  **	2	0.199	0.198	4.1851	0.123
** .	** .	3	-0.194	-0.213	8.0898	0.044
* .	* .	4	-0.157	-0.194	10.681	0.030
* .	. .	5	-0.146	-0.055	12.935	0.024
. .	. .	6	-0.004	0.043	12.937	0.044
. .	* .	7	-0.029	-0.058	13.027	0.071
. .	* .	8	-0.016	-0.104	13.055	0.110
. .	. .	9	0.030	0.024	13.157	0.156
. .  *	. .  *	10	0.099	0.124	14.267	0.161
. .	. .	11	0.016	-0.034	14.296	0.217
. .	. .	12	0.063	-0.010	14.747	0.256
. .	. .	13	-0.035	0.004	14.889	0.314
. .	. .	14	-0.045	-0.015	15.133	0.369
. .	. .	15	-0.010	0.027	15.146	0.441
. .	. .	16	-0.019	-0.012	15.188	0.511
. .	. .	17	-0.013	-0.026	15.209	0.580
* .	* .	18	-0.093	-0.105	16.277	0.573
* .	* .	19	-0.099	-0.112	17.508	0.556
* .	* .	20	-0.149	-0.133	20.305	0.439

Série z

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	. *****	1	0.870	0.870	77.207	0.000
. *****	. *	2	0.789	0.133	141.38	0.000
. *****	** .	3	0.639	-0.299	183.96	0.000
. ****	* .	4	0.551	0.095	215.94	0.000
. ****	. **	5	0.494	0.211	241.85	0.000
. ****	. .	6	0.467	0.051	265.33	0.000
. ***	* .	7	0.434	-0.100	285.80	0.000
. ***	. .	8	0.405	0.003	303.83	0.000
. ***	. *	9	0.377	0.095	319.58	0.000
. ***	. .	10	0.343	-0.020	332.80	0.000
. **	* .	11	0.294	-0.143	342.63	0.000
. **	. .	12	0.245	-0.033	349.50	0.000
. *	. .	13	0.183	-0.013	353.38	0.000
. *	* .	14	0.124	-0.068	355.18	0.000
. .	. .	15	0.078	-0.022	355.91	0.000
. .	* .	16	0.025	-0.085	355.99	0.000
. .	* .	17	-0.020	-0.062	356.04	0.000
* .	* .	18	-0.074	-0.061	356.72	0.000
* .	. .	19	-0.113	0.007	358.31	0.000
* .	* .	20	-0.128	0.092	360.37	0.000

Série y

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	. *****	1	0.955	0.955	93.013	0.000
. *****	. .	2	0.916	0.048	179.48	0.000
. *****	** .	3	0.855	-0.268	255.56	0.000
. *****	* .	4	0.809	0.125	324.48	0.000
. *****	. **	5	0.776	0.201	388.49	0.000
. *****	. .	6	0.750	0.007	448.97	0.000
. *****	* .	7	0.723	-0.105	505.77	0.000
. *****	. .	8	0.697	0.021	559.13	0.000
. *****	. .	9	0.665	-0.010	608.19	0.000
. *****	* .	10	0.629	-0.074	652.64	0.000
. *****	. .	11	0.591	-0.043	692.34	0.000
. ****	* .	12	0.546	-0.094	726.64	0.000
. ****	. .	13	0.502	-0.049	755.90	0.000
. ***	. .	14	0.457	-0.007	780.50	0.000
. ***	. .	15	0.419	0.026	801.40	0.000
. ***	* .	16	0.377	-0.121	818.48	0.000
. ***	. .	17	0.340	-0.012	832.54	0.000
. **	. .	18	0.296	-0.037	843.35	0.000
. **	. .	19	0.257	0.001	851.60	0.000
. **	* .	20	0.227	0.121	858.12	0.000

## Série w

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	. *****	1	0.959	0.959	93.802	0.000
. *****	. .	2	0.918	-0.019	180.64	0.000
. *****	. .	3	0.872	-0.087	259.75	0.000
. *****	. .	4	0.829	0.026	332.14	0.000
. *****	. .	5	0.792	0.044	398.88	0.000
. *****	. .	6	0.758	0.006	460.58	0.000
. *****	. .	7	0.724	-0.017	517.50	0.000
. *****	. .	8	0.691	-0.002	569.97	0.000
. *****	. .	9	0.655	-0.052	617.70	0.000
. *****	. .	10	0.619	-0.028	660.76	0.000
. ****	. .	11	0.583	-0.011	699.39	0.000
. ****	. .	12	0.544	-0.064	733.36	0.000
. ****	. .	13	0.506	-0.009	763.13	0.000
. ****	. .	14	0.469	-0.009	789.04	0.000
. ***	. .	15	0.436	0.006	811.62	0.000
. ***	. .	16	0.401	-0.041	830.97	0.000
. ***	. .	17	0.369	0.012	847.60	0.000
. ***	. .	18	0.335	-0.051	861.46	0.000
. **	. .	19	0.303	-0.003	872.91	0.000
. **	. .	20	0.274	0.025	882.38	0.000

On vérifie que les autocorrélations chutent très vite dans les deux premiers cas et fort lentement dans les deux derniers, illustrant alors la non-stationnarité, tandis que toutes les autocorrélations partielles deviennent faibles dès que l'écart dépasse une période, comme attendu pour l'ensemble des séries considérées.

**Choc ponctuel** : examinons à présent l'influence à long terme d'un choc ponctuel dans les trois cas considérés. On peut supposer ce choc à la période initiale et  $x_0$  est remplacé par  $x_0 + K$ , la suite satisfaisant à la relation (1). La relation (1.1) montre que l'incidence de ce choc  $K$  sur  $x_t$ ,  $t$  périodes plus tard, est  $\alpha^t K$ , par suite, dans le cas stationnaire où  $|\alpha| < 1$ ,  $\alpha^t$  converge vers 0 et l'effet du choc est amorti et décroît vers zéro. Dans le cas de la marche aléatoire, l'effet sur  $x_t$  reste inchangé et égal à  $K$  au cours du temps, et dans le cas explosif, enfin, l'effet, tel  $\alpha^t$ , va en s'amplifiant indéfiniment.

### Modèles avec constante, dérive et trend

On laisse désormais de côté les processus explosifs, peu fréquents en économie.

Elargissant les modèles précédents, on considère les processus autorégressifs *avec constante*, de la forme :

$$(3) \quad x_t = \alpha \cdot x_{t-1} + \beta + \varepsilon_t \quad (\text{avec } |\alpha| < 1 \text{ et } \beta \neq 0)$$

auxquels correspondent pour  $\alpha = 1$  les marches aléatoires *avec dérive* :

$$(4) \quad x_t = x_{t-1} + \beta + \varepsilon_t \quad (\text{avec } \beta \neq 0)$$

les processus autorégressifs *avec trend temporel* (linéaire), de la forme :

$$(5) \quad x_t = \alpha \cdot x_{t-1} + \beta + \gamma \cdot t + \varepsilon_t \quad (\text{avec } |\alpha| < 1 \text{ et } \gamma \neq 0)$$



voire les marches aléatoires de forme correspondante :

$$(6) \quad x_t = x_{t-1} + \beta + \gamma.t + \varepsilon_t \quad (\text{avec } \gamma \neq 0)$$

l'aléa  $\varepsilon_t$  étant toujours supposé de même nature que pour le modèle (1), c'est à dire iid.

Des formes plus complexes peuvent être envisagées, cela ne sera pas fait ici.

**Propriétés** : aucun de ces processus n'est stationnaire, l'espérance  $E(x_t)$  par exemple n'étant pas bornée, mais les uns et les autres peuvent être *stationnarisés*, c'est à dire s'y ramener, par des « corrections » ou des transformations appropriées.

**Choc** : de même, l'effet à long terme d'un choc ponctuel est amorti dans le cas d'un processus autorégressif et stable pour les marches aléatoires (bien que l'effet relatif puisse diminuer quant à lui avec le temps).

Les processus de formes (3) et (5) sont dits *trend-stationnaires* (TS, ou parfois encore à *trend déterministe*), car la bonne manière de les stationnariser consiste à estimer, en général par les mco, l'expression du trend et à la retirer.

Les processus de forme (2), (4) et (6) sont dits *différence-stationnaires* (DS), car la bonne manière de les stationnariser est par passage aux différences.

Les processus DS se prêtent notamment moins bien à la prévision à moyen et *a fortiori* à long terme ; les séries boursières (telle celle quotidienne du CAC 40) sont fréquemment de ce type...

### Tests de Dickey-Fuller

On a ainsi vu que les différents types de séries examinés avaient des propriétés différentes, que leur usage sous une forme non-stationnarisée pouvait produire des régressions illusoires, que leurs propriétés n'étaient pas les mêmes et enfin que la méthode à employer pour les stationnariser différait suivant les cas ; il est donc important d'identifier à quelle catégorie appartient une série économique donnée - à supposer que ce soit bien à l'une des précédentes... Tel est l'objectif, après un examen visuel et le calcul des coefficients d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle, des tests de *Dickey-Fuller* (ou tests DF, également appelés *tests de racine unitaire*).

**Description des tests** : il y a en fait trois tests, correspondant au cas de base (d'hypothèse  $H_0$  : modèle (2), contre (1)), au cas avec dérive ou constante

(d'hypothèse  $H_0$  : modèle (4), contre (3)) et au cas avec trend (d'hypothèse  $H_0$  : modèle (6), contre (5)).

Les trois modèles alternatifs sont réécrits sous des formes algébriquement équivalentes :

$$(1') \quad x_t - x_{t-1} = (\alpha-1).x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(3') \quad x_t - x_{t-1} = (\alpha-1).x_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

$$(5') \quad x_t - x_{t-1} = (\alpha-1).x_{t-1} + \beta + \gamma.t + \varepsilon_t$$

soit encore :

$$(1'') \quad \Delta x_t = \Phi.x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(3'') \quad \Delta x_t = \Phi.x_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

$$(5'') \quad \Delta x_t = \Phi.x_{t-1} + \beta + \gamma.t + \varepsilon_t$$

en notant  $\Phi$  la quantité  $(\alpha-1)$  et naturellement  $\Delta$  l'opérateur *différence-première*. Il est clair qu'il est équivalent de tester l'hypothèse :  $\alpha = 1$ , dans les modèles sous la forme initiale, ou  $\Phi = 0$  dans leur version transformée (hypothèse  $H_0$ ).

On estime par les mco le modèle (5'') et on calcule la statistique de Student pour la valeur estimée de  $\gamma$ , de  $\beta$  et de  $\Phi$ . Si on opère les tests comme on l'a appris pour les coefficients  $\gamma$  et  $\beta$ , en ce qui concerne  $\Phi$ , les choses diffèrent du test de Student traditionnel : ayant exclu le cas explosif ( $\alpha > 1$  ou  $\Phi > 0$ ) on procède au test unilatéral ( $\alpha = 1$  ou  $\Phi = 0$  contre  $\Phi < 0$ ) ce qui donne une zone de rejet située du côté négatif, et les hypothèses des mco n'étant pas satisfaites, notamment du fait que la variable considérée est endogène, on utilise une table particulière calculée par Dickey et Fuller.

En cas de rejet total ou partiel du test du modèle (5'') avec  $\Phi = 0$ , opéré comme indiqué, on teste de même le modèle (3'') et  $\Phi = 0$  avec la table voulue, puis encore si nécessaire le modèle (1'') avec  $\Phi = 0$ .

### **Exemples**

On reprend l'exemple numérique de la série  $w$  déjà considérée plus haut, l'estimation de (5'') sur les 100 observations donne :

$$\begin{array}{l} \Delta w = -0,005557.w_{-1} + 0,239578 + -0,013269.t \\ \quad \quad \quad (-0,2629) \quad \quad (0,9743) \quad \quad (-1,7220) \end{array}$$

en notant entre parenthèses les ratios de Student. Le ratio  $-0,2629$ , associé à  $w$  retardée, est à rapporter aux seuils de rejet  $-2,60$ ,  $-1,95$  et  $-1,60$  calculés par Dickey et Fuller aux niveaux de risque 1%, 5% et 10%, et conduit donc dans tous les cas à l'acceptation de  $H_0$ , mais en fait les deux autres coefficients ne sont pas significativement différents de 0 et il faut donc passer à (3"), et même à (1").

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
W(-1)	0.027422	0.009029	3.037133	0.0031
C	-0.129231	0.122017	-1.059120	0.2922

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
W(-1)	0.033601	0.006895	4.873238	0.0000

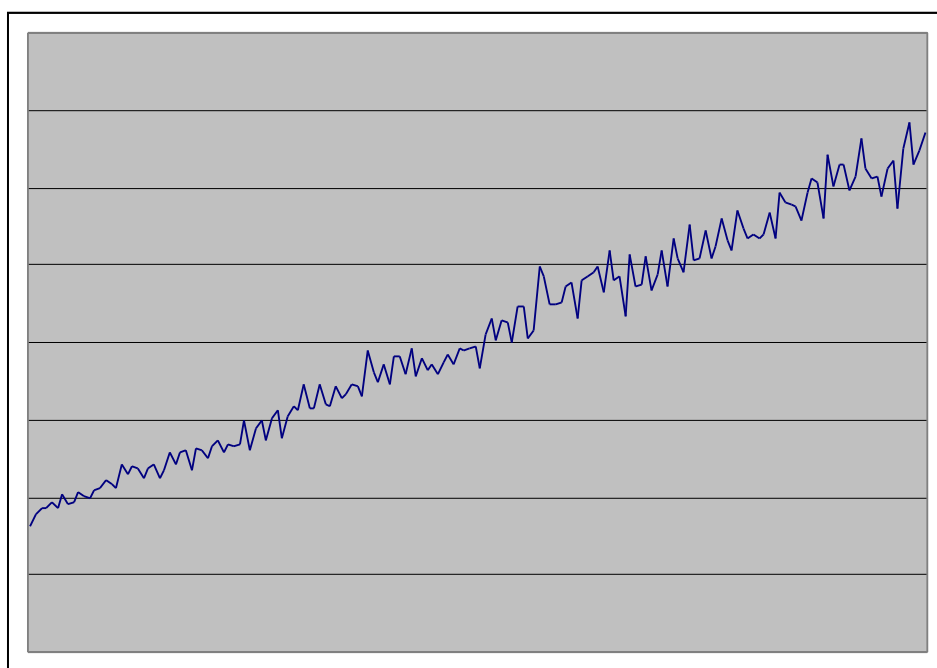
L'acceptation de  $H_0$  nous conduit à penser que  $w$  est une marche aléatoire sans trend ni dérive... (en fait,  $w$  a été construit comme processus explosif mais avec  $\alpha = 1,003$  très légèrement supérieur à 1).

Prenons à présent l'exemple des dépenses mensuelles CVS de santé en pharmacie de janvier 1981 à décembre 1994 en France (emprunté à Bourbonnais et Terraza).

L'estimation du modèle (5"), de variable à expliquer  $\Delta PHAR$ , par les mco donne :

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PHAR(-1)	-1.084314	0.078141	-13.87638	0.0000
C	1847.351	134.6594	13.71870	0.0000
TREND	30.84197	2.242282	13.75472	0.0000

Ce qui conduit à rejeter l'hypothèse  $H_0$  et à retenir un modèle TS.



Dépenses mensuelles de santé (1981.01 – 1994.12)

**Remarque** : on voit que ces tests sont aisés à mettre en œuvre, pourvu qu'on dispose d'un logiciel opérant les mco (tel le simple Excel) et de la table de Dickey-Fuller ; les logiciels économétriques plus perfectionnés dispensent naturellement l'utilisateur des différentes manipulations décrites : calcul des différences, appel des mco, lecture de la table, etc., et éditent directement la régression sur le modèle transformé, les seuils concernés de la table de Dickey-Fuller et la conclusion...

## Extensions

### Tests conjoints, stratégies

Comme on l'a vu ci-dessus dans la description des tests, celui par exemple de l'équation (5") opère en fait des tests simultanés sur  $\Phi$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Les estimations de ces paramètres n'étant pas indépendantes, strictement, il est préférable d'effectuer des tests d'hypothèses multiples. Mais l'estimation de  $\Phi$  ne suivant pas la loi habituelle, il convient d'utiliser non les tables de Fisher usuelles mais de nouvelles tables conjointes, également calculées par Dickey et Fuller.

Partant du modèle le plus général, supposé pertinent, des stratégies séquentielles fines, utilisant les divers tests conjoints ou simples de Dickey-Fuller et de Student, ont été proposées, telles celles d'Ertur ou de Mitchell.

### Tests de Dickey-Fuller augmenté (DFA)

On a supposé dans tous les exemples précédents les aléas  $\varepsilon_t$  iid et notamment indépendants. On a vu dans les chapitres précédents que cette hypothèse très forte est le plus souvent irréaliste. Autorisant l'aléa lui-même à suivre un modèle autorégressif, Dickey et Fuller ont déterminé les modèles transformés correspondants et calculé les nouvelles tables permettant de faire les tests précédents (tests et tables de *Dickey-Fuller augmentés* - DFA). Ils ne sont pas détaillés ici.

### Modèles chronologiques plus complexes

Les processus décrits précédemment sont les plus simples, même s'ils permettent de décrire beaucoup de cas ; des modèles plus élaborés autorisent notamment la prise en compte de retards non limités à la seule période précédente (ainsi pour les tests DFA) ; par ordre de complexité, on peut citer les modèles AR, MA, ARMA, ARIMA, SARIMA, la cointégration, etc. Une des questions essentielle reste celle de la stationnarité, notamment pour les raisons mentionnées dans ce chapitre. Les tests DF et DFA sont un outil d'usage fréquent qu'il convient donc de savoir manipuler.

### Table de Dickey-Fuller (DF)

Critical values for the Dickey-Fuller t statistics

Sample size	Level of significance		
	0.01	0.05	0.10
<b>Testing <math>\Phi = 0</math> in <math>\Delta x_t = \Phi \cdot x_{t-1} + \eta_t</math> "t-test" statistic</b>			
25	-2.66	-1.95	-1.60
50	-2.62	-1.95	-1.61
100	-2.60	-1.95	-1.61
250	-2.58	-1.95	-1.62
Infinite	-2.58	-1.95	-1.62
<b>Testing <math>\Phi = 0</math> in <math>\Delta x_t = \Phi \cdot x_{t-1} + \beta + \eta_t</math> "t-test" statistic</b>			
25	-3.75	-3.00	-2.62
50	-3.58	-2.93	-2.60
100	-3.51	-2.89	-2.58
250	-3.46	-2.88	-2.57
Infinite	-3.44	-2.87	-2.57
<b>Testing <math>\Phi = 0</math> in <math>\Delta x_t = \Phi \cdot x_{t-1} + \beta + \gamma \cdot t + \eta_t</math> "t-test" statistic</b>			
25	-4.38	-3.60	-3.24
50	-4.15	-3.50	-3.18
100	-4.04	-3.45	-3.15
250	-3.99	-3.43	-3.13
Infinite	-3.98	-3.42	-3.13
<b>Standard t-distribution (Student)</b>			
Infinite	-2.33	-1.65	-1.28
(Source: W.A. Fuller (1976), Table 8.5.2)			

-----oOΩOo-----

(11.03.2009)