

Fonctions exponentielles et logarithmes

Il s'agit de deux familles de fonctions étroitement liées, la première étendant à toutes les valeurs réelles la notion déjà connue de puissance. On en donne ici une présentation naïve.

Exemple introductif : si beaucoup de grandeurs, tels les poids, les bénéfices, les durées, s'ajoutent, d'autres valeurs, tels les indices, se multiplient ; supposons ainsi une population animale qui s'accroît de 3% chaque année, si elle part de la taille P_0 , elle vaudra les années suivantes :

$$P_1 = P_0 \cdot 1,03$$

$$P_2 = P_0 \cdot 1,03^2$$

$$P_3 = P_0 \cdot 1,03^3$$

...

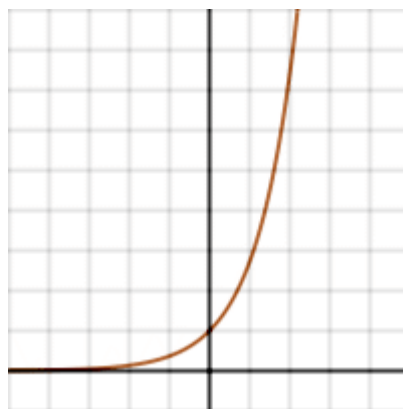
$$P_t = P_0 \cdot 1,03^t$$

ce qui fait apparaître les puissances successives de 1,03, il s'agit d'une croissance de type *exponentiel*.

Fonctions exponentielles, fonction exponentielle de base a

Définition : soit a un réel strictement positif, on connaît les puissances entières successives de a : a , a^2 , a^3 , ... a^n . Cette fonction se généralise d'une manière naturelle unique aux exposants négatifs, fractionnaires, puis réels quelconques, c'est la *fonction exponentielle de base a*, notée $f(x) = a^x$ (on note que la variable x ici est l'exposant, contrairement au cas des fonctions polynomiales telle $f(x) = x^k$).

Graphe : si $a > 1$, a^x est une fonction strictement croissante de l'ensemble des réels vers les réels strictement positifs. Son graphe est le suivant :



On remarque la croissance accélérée de cette fonction qui dépasse celle de toutes les fonctions polynomiales (par exemple $f(x) = x^{1000}$).

Les deux fonctions exponentielles les plus utilisées sont celle de base 10 ($f(x) = 10^x$) et celle de base e (où $e = 2,71828183\dots$, nombre pouvant sembler mystérieux mais qui apparaît d'une manière naturelle dans une présentation alternative plus théorique) notée e^x ou $\exp(x)$, voire $\exp x$, et appelée simplement *fonction exponentielle*.

Propriétés : généralisant ce qui est bien connu pour les puissances entières, la propriété fondamentale des fonctions exponentielles peut s'exprimer ainsi *les fonctions exponentielles transforment les sommes en produits*, soit :

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

avec les différentes propriétés corrélatives

$$a^0 = 1 \quad (\text{et } a^1 = a)$$

$$a^{-x} = 1/a^x$$

$$a^{x-y} = a^x/a^y$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Si $a < 1$ la courbe représentative est décroissante.

Calculs : les calculettes scientifiques, ou simplement les tableurs, permettent de calculer les exponentielles, en Excel, par exemple, on utilise la notation a^x pour l'exponentielle de base a et $\exp(x)$ pour e^x .

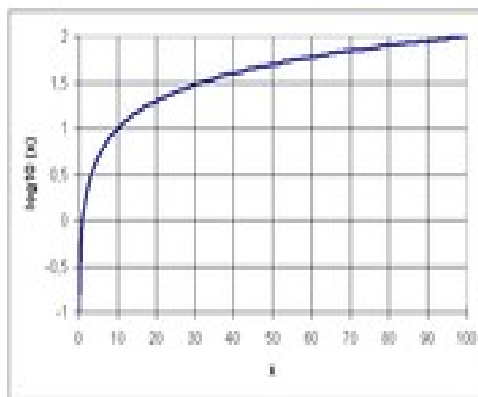
Fonctions logarithmes, logarithmes de base a, logarithmes népériens

Définition : les fonctions *logarithmes* sont les fonctions inverses des fonctions exponentielles, plus précisément, si $x = a^z$, alors z est le *logarithme de base a* de x, ou encore c'est l'exposant dont il faut affecter a pour obtenir x, cette fonction est notée $f(x) = \log_a(x)$ ou simplement $\log_a x$.

Les deux fonctions logarithmes les plus utilisées sont les logarithmes de base 10 ou *logarithmes décimaux*, souvent notés simplement $\log(x)$ ou $\log x$ et les logarithmes de base e, dits *logarithmes népériens* (du nom du financier écossais John Neper, ou Napier, l'inventeur des logarithmes) et notés $\ln(x)$ ou $\ln x$.

Les diverses propriétés des logarithmes découlent pour la plupart de celles des exponentielles.

Graphe : les logarithmes ne sont définis que pour les réels strictement positifs ; pour une base a strictement supérieure à 1, la fonction $f(x) = \log_a x$ est croissante et son graphe est le symétrique de celui figuré plus-haut (par inversion des rôles de la variable et de la fonction) :



Propriétés : les fonctions logarithmes transforment les produits en sommes, soit :

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

et

$$\log_a 1 = 0 \quad (\text{et } \log_a a = 1)$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a (1/x) = -\log_a x$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

et aussi

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

On montre enfin que toutes les fonctions logarithmes sont proportionnelles, c'est à dire ne diffèrent que d'un facteur multiplicatif, par exemple toutes se ramènent au log népérien :

$$\log_a x = \ln x / \ln a$$

Usage des logarithmes : les fonctions logarithmes doivent historiquement leur succès et leur importance à leur aptitude à ramener les calculs multiplicatifs à des additions et des soustractions. Cette utilité a disparu avec l'apparition des machines à calculer, mais ils permettent toujours de donner une forme plus aisée à manipuler à des modèles à caractère multiplicatif.

Exemple 1 : croissance exponentielle, soit une grandeur croissant de manière multiplicative constante :

$$P_t = P_0 \cdot i^t$$

en passant en logarithmes, ce modèle prend la forme linéaire plus simple :

$$\ln P_t = \ln P_0 + t \cdot \ln i$$

Exemple 2 : fonction de production de type *Cobb-Douglas*, ce modèle postule que la production Y d'un certain bien dépend des intrants, capital et travail, selon une relation :

$$Y = a \cdot K^b \cdot T^c$$

cette relation se *linéarise* de même en :

$$\ln Y = \ln a + b \cdot \ln K + c \cdot \ln T$$

Propriétés avancées : mentionnons deux propriétés plus avancées des fonctions exponentielles et logarithmes, dont on ne donnera pas d'applications ici.

La fonction exponentielle est sa propre dérivée : $(e^x)' = e^x$, c'est la seule fonction à satisfaire cette *équation différentielle*.

La fonction logarithme népérien est une *primitive* de la fonction $1/x$: $(\ln x)' = 1/x$.

Moyenne géométrique

Définition : on se souvient que la recherche d'un caractère additif moyen conduisait à la notion de *moyenne arithmétique*, dite simplement moyenne, celle d'un effet multiplicatif moyen conduit à celle de *moyenne géométrique*.

Soit une suite de nombres positifs : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, de produit $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$, on appelle *moyenne géométrique*, notée G , de ces nombres, le nombre qui multiplié n fois, ou élevé à la puissance n , donne le même résultat P , par suite G est la racine n -ième de P .

Calcul : la racine n -ième d'un nombre est simplement sa puissance $1/n$, il suffit donc d'appeler convenablement cette exponentielle pour calculer une moyenne géométrique à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice scientifique.

Propriété : du fait de la propriété fondamentale des logarithmes, on voit qu'il est équivalent de calculer la moyenne arithmétique des logarithmes des x_i :

$$\ln G = \ln (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{1/n} = (\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n) / n$$

cela était surtout utile avant l'apparition des calculatrices...

Exemple : on suppose qu'un certain pays subit une hausse des prix de 2,5% pendant trois ans, puis de 1% pendant deux ans, quel taux d'inflation annuel constant aurait le même effet sur la période ? Solution : l'indice d'évolution sur les cinq ans est $I_{5/0} = 1,025^3 \cdot 1,01^2 \approx 1,0985$ et le taux annuel équivalent en est donc la racine cinquième soit $i \approx 1,0190$ c'est à dire un taux d'inflation annuel *moyen* de 1,90% environ.

Exercices

Placement à taux fixe

- On place 35.000 € au taux de 4,3% par an (avec capitalisation), quel sera le capital au bout de 5 ans, de 10 ans, de 15 ans ?
- Au bout de combien d'année le capital précédent aura-t-il doublé ?

- c) Un capital placé à taux fixe triple en 25 ans, quel est ce taux ?

Rente fixe et spéculation

- a) Un rentier perçoit une rente fixe annuelle de 10.000 €, combien aura-t-il perçu après N versements annuels ?
b) Un opérateur boursier disposant au départ de 2000 € obtient des plus-values qu'il capitalise de 20% par an, quel sera son capital après N années ?
c) On suppose que l'opérateur perçoit ses dividendes en même temps que le rentier touche sa rente, au bout de combien de temps le capital du premier dépassera-t-il celui du second ?

Démographie

- a) Une certaine population a un accroissement net de 3% par an, en combien d'années doublera-t-elle ?
b) Une certaine population évoluant de manière régulière double en vingt ans, en combien d'année triplera-t-elle ?
c) Une certaine population s'accroît de 4% pendant trois ans, puis de 2% pendant 5 ans et de 3,5% pendant deux ans, calculer l'accroissement total et l'accroissement annuel moyen sur la période.

(maj 10.11.2009)

-----ooOoo-----