CHAPITRE 6

CROISSANCE, EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

→ *Fonctions exponentielles*
→ *Fonctions logarithmes*
→ *Moyennes géométriques*

REPÈRES

Si beaucoup de grandeurs s'ajoutent (des poids, des chiffres d'affaires, etc.), d'autres types de données, tels les indices de prix sur des périodes successives, se composent non par addition mais par multiplication.

Ces opérations font naturellement apparaître les fonctions exponentielles, tandis que les fonctions logarithmes permettent de revenir à des modèles additifs. Nous rappellerons simplement ici les propriétés et l'usage de ces fonctions.

1. Les fonctions exponentielles

a) Exemple introductif

Une population s'accroît de 12 % par an ; son effectif est ainsi multiplié chaque année par un facteur (un indice) : $i = 1{,}12$.

Sur une période de 2 ans, l'effectif est multiplié par un facteur $1{,}12^2$; sur 3 ans par $1{,}12^3$; sur 5 ans par $1{,}12^5$; ... ; sur N ans par $1{,}12^N$.

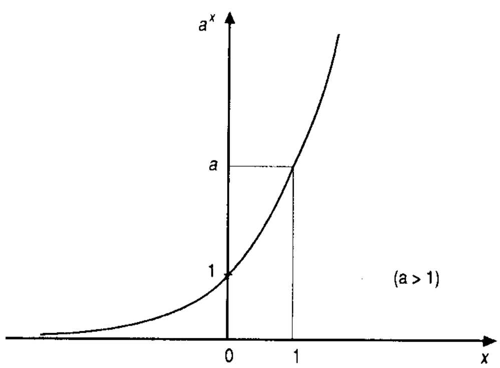
Cette évolution est appelée exponentielle, et doit pouvoir s'évaluer aussi pour des nombres non entiers d'années.

b) Fonction exponentielle de base a (a > 0)

Soit a un nombre strictement positif, la fonction exponentielle de base a est la fonction notée a^x, qui étend aux nombres non entiers la fonction « puissance de a », déjà connue pour des exposants entiers. Cette fonction est définie pour toutes les valeurs réelles de la variable x et ne prend que des valeurs strictement positives.

Si la base a est inférieure à 1, la fonction est décroissante ; si la base a est supérieure à 1, la fonction est croissante (voir fig. 1).

Figure 1



Les deux fonctions exponentielles les plus utilisées sont l'exponentielle de base 10, c'est-à-dire la fonction 10^x, et l'exponentielle de base e (où $e = 2{,}71828...$), soit e^x, couramment appelée fonction exponentielle.

Comme le montre l'exemple introductif, toute grandeur évoluant d'une manière multiplicative stable s'exprime à l'aide d'une exponentielle. Ce sera ainsi le cas d'un capital placé à un taux d'intérêt fixé, d'une population s'accroissant de manière régulière, d'un prix en période d'inflation constante, etc.

Si on note P_0 la valeur initiale en période 0, et i le facteur multiplicatif sur une période, la valeur en période T est :

$$P_T = P_0 \cdot i^T.$$

On dit que la grandeur P suit une croissance exponentielle. Et quand l'évolution est continue, l'expression s'applique aussi pour des valeurs non entières de T.

c) Propriétés

• Croissance : Pour une base a supérieure à 1, l'exponentielle de base a croît d'une manière accélérée. Une exponentielle de base $a > 1$ croît plus vite que n'importe quelle fonction : $f(x) = x^N$.

On dit que « la croissance exponentielle dépasse la croissance polynomiale ».

- Propriété fondamentale :

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Cette propriété usuelle pour des valeurs entières de x et y est générale ; on dit que « les fonctions exponentielles transforment les sommes en produits ».

Cette propriété s'accompagne des corollaires :

$$a^0 = 1 \quad (\text{et } a^1 = a)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

2. Les fonctions logarithmes

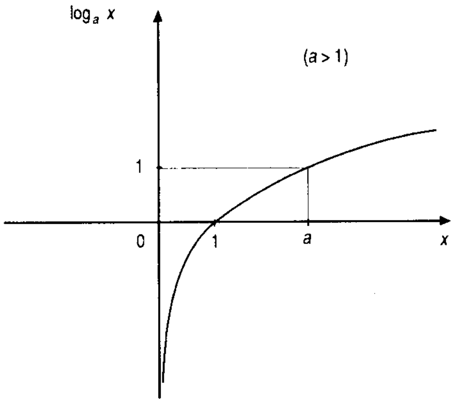
a) Fonction logarithme de base a (a > 0)

Soit a un nombre strictement positif, la fonction logarithme de base a est la fonction réciproque de l'exponentielle de base a, elle est notée :

$$\log_a(x) \text{ ou } \log_a x.$$

On a donc si $x = a^z$: $z = \log_a x$. En d'autres termes, le logarithme de base a du nombre (strictement positif) x est l'exposant dont il faut affecter a pour obtenir x.

Figure 2



Les deux fonctions logarithmes les plus utilisées sont :

– les logarithmes de base 10, ou logarithmes décimaux : $\log_{10}x$, notés plus simplement $\log(x)$ ou $\log x$;

– les logarithmes de base $e = 2{,}71828$, appelés *logarithmes népériens* (du nom de l'inventeur des logarithmes, Neper) : $\log_e(x)$ notés plus simplement $\ln(x)$ ou $\ln x$.

b) Propriétés

- Propriété fondamentale :

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Cette propriété est la propriété inverse de celle des fonctions exponentielles ; on dit que « les logarithmes transforment les produits en somme ». Elle s'accompagne des corollaires :

$$\log_a(1) = 0 \quad (\text{et } \log_a(a) = 1)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a x^b = b \cdot \log_a(x).$$

- Proportionnalité des fonctions logarithmes :

Les fonctions logarithmes sont toutes proportionnelles. Ainsi, par exemple : $\ln(x) = 2{,}3026 \cdot \log(x)$ et, plus généralement : $\log_a(x) = \log_a(10) \cdot \log(x)$.

c) Emploi des logarithmes

L'emploi des logarithmes permet de transformer les modèles multiplicatifs (ou exponentiels) en modèles additifs, plus aisés à traiter.

On suppose ainsi que les deux grandeurs y et x sont liées par une relation de type exponentiel :

$$y = ax \cdot b.$$

En prenant les logarithmes (par exemple népériens), on obtient la relation équivalente :

$$\ln(y) = x \cdot \ln(a) + \ln(b).$$

Cette dernière relation est une relation du premier degré, ou linéaire, entre la grandeur transformée, $\ln(y)$, et x.

Que ce soit pour tester la liaison exponentielle entre les grandeurs initiales (y et x), ou pour en estimer les paramètres (a et b), il est beaucoup plus facile de travailler sur la relation transformée [entre $\ln(y)$ et x].

3. Moyenne géométrique

a) Exemple introductif

Dans un pays donné, l'inflation est de 40 % une année, de 10 % l'année suivante, puis de 5 % la troisième année. On se demande quelle inflation annuelle constante aurait le même effet sur la période de trois ans.

Les prix sont multipliés par 1,40 la première année, par 1,10 la deuxième et par 1,05 la troisième ; on cherche l'indice annuel i qui, répété trois années de suite, a le même effet que l'enchaînement des trois indices (i) précédents :

$$i \,.\, i \,.\, i = i^3 = 1{,}40 \times 1{,}10 \times 1{,}05,$$

ce qui se résout en prenant la racine cubique du produit :

$$i = \sqrt[3]{1{,}40 \times 1{,}10 \times 1{,}05} = 1{,}1737.$$

L'inflation annuelle moyenne, c'est-à-dire l'inflation annuelle constante qui aurait le même effet, est donc de 17,4 %.

On voit qu'il ne s'agit pas ici d'une moyenne arithmétique ; cette nouvelle moyenne est dite *moyenne géométrique*.

b) Définition

On appelle *moyenne géométrique* des N nombres positifs : $x_1, x_2, \ldots, x_N$ le nombre positif noté G tel que :

$$G^N = x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, \ldots \,.\, x_N.$$

Il s'agit de la racine Nième du produit des N nombres positifs :

$$G = \sqrt[N]{x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, \ldots \,.\, x_N}$$

que l'on préfère noter :

$$G = \left(x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, \ldots \,.\, x_N\right)^{1/N},$$

(on rappelle que $\sqrt{x}$ est une notation traditionnelle de $x^{1/2}$).

On voit que la recherche d'un effet multiplicatif moyen conduit naturellement à une moyenne géométrique ; tel est le cas avec les taux d'inflation successifs, les taux d'intérêt, etc., mais il faut faire attention de calculer la moyenne géométrique non pas des taux eux-mêmes, mais des indices multiplicatifs correspondants.

La moyenne géométrique est un indicateur de la tendance centrale.